SOLUCIONES COMENTADAS

1. **(1 punto)**

En $A = (\mathbf{R} - \{0\}) \times \mathbf{R}$ se considera la relación S definida por: (a,b) S (c,d) si $\frac{b}{a^2} = \frac{d}{c^2}$

Se pide:
(a) Comprueba que es de equivalencia.
(b) Halla la clase de (1,3) y la clase de (2,0)
(c) Describe el conjunto cociente A/S en términos geométricos.

SOL.:

(a) Se debe comprobar que la relación S cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva

Reflexiva: (a,b) S (a,b) para todo par (a,b)

Se cumple porque $\frac{b}{a^2} = \frac{b}{a^2}$

Simétrica: Si (a,b) S (c,d) entonces (c,d) S (a,b)

Si (a,b) S (c,d) entonces $\frac{b}{a^2} = \frac{d}{c^2}$, es decir, $\frac{d}{c^2} = \frac{b}{a^2}$ pero esto implica que (c,d) S (a,b)

Transitiva: Si (a,b) S (c,d) y (c,d) S (e,f) entonces (a,b) S (e,f)

La primera condición indica que $\frac{b}{a^2} = \frac{d}{c^2}$ y la segunda que $\frac{d}{c^2} = \frac{f}{e^2}$, luego $\frac{b}{a^2} = \frac{f}{e^2}$,

es decir, (a,b) S (e,f)

(b) Clase de (1,3)

$[(1,3)] = \{(x,y)\in A \ / \ (x,y) \ S \ (1,3)\} = \{(x,y)\in A \ / \ \frac{y}{x^2} = \frac{3}{1}\} = \{(x,y) \in A \ / \ y = 3x^2\}$

La clase de (1,3) está formada por los puntos de la parábola $y=3x^2$ (excepto el origen)

Clase de (2,0)

$[(2,0)] = \{(x,y)\in A \ / \ (x,y) \ S \ (2,0)\} = \{(x,y)\in A \ / \ \frac{y}{x^2} = \frac{0}{2}\} = \{(x,y) \in A \ / \ y = 0\}$

La clase de (1,3) está formada por los puntos de la recta y = 0 (excepto el origen)

(c) Conjunto cociente A/S

Describamos la clase de un elemento (a,b) de A

$[(a,b)] = \{(x,y)\in A \ / \ (x,y) \ S \ (a,b)\} = \{(x,y)\in A \ / \ \frac{y}{x^2} = \frac{b}{a^2}\} = \{(x,y) \in A \ / \ y = \frac{b}{a^2}x^2\}$

La clase de (a,b) está formada por los puntos de la parábola $y = \frac{b}{a^2}x^2$ (excepto el origen)

Así el conjunto cociente A/S es el conjunto de parábolas de ecuaciones $y = kx^2$ $k\in\mathbf{R}$, eliminando el origen en todas ellas. Para k=0 la parábola es realmente la recta y=0.

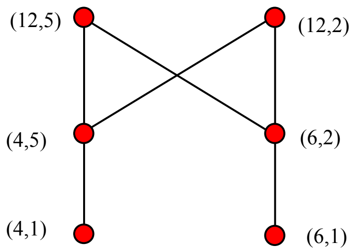
2. **(2 puntos)**

Se considera el conjunto $(D_{36}, |) \times (D_{10}, |)$ ordenado con el orden lexicográfico y con el orden producto. Dado el subconjunto A = {(4,1), (4,5), (6,1), (6,2), (12,2), (12,5)}, halla, si existen, los elementos maximales y minimales, cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo del subconjunto A, tanto para el orden lexicográfico como para el orden producto. Sugerencia: Dibuja los diagramas de Hasse de A respecto de ambos órdenes.

SOL.:

Trabajamos independientemente los dos órdenes que se piden en el enunciado. Algunos alumnos solo indican resultados para uno de los órdenes sin decir nada de con cuál están trabajando.

Orden lexicográfico en A



Empezamos dibujando el diagrama de Hasse de (A, Lex)

Empecemos buscando minimales y maximales, que SÓLO debemos buscar dentro de A.

Elementos maximales: (12,2) y (12,5) porque no hay ningún elemento de A posterior a ellos. Además estos elementos son incomparables en el orden lexicográfico porque lo son 2 y 5 en $(D_{10}, |)$

Como hay más de un maximal NO existe máximo

Elementos minimales: {(4,1), (6,1)}, porque no hay ningún elemento de A anterior lexicográficamente a ninguno de ellos

Como hay más de un minimal NO existe mínimo.

Ahora buscamos cotas superiores e inferiores de A. Hay que mirar en todo $(D_{36}, |) \times (D_{10},|)$

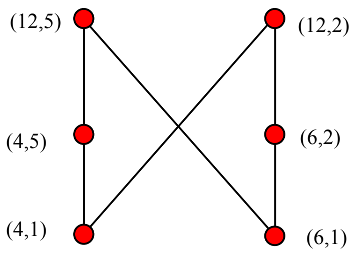
Cotas superiores de A: $\{(12,10)\} \cup \{(36,k) / k\in D_{10}\}$

Como (12,10) es anterior al resto de cotas, será el supremo de A

Cotas inferiores de A: $\{(1,k) / k\in D_{10}\} \cup \{(2,k) / k\in D_{10}\}$

Ínfimo de A es (2,10) porque es la mayor, en el orden lexicográfico, de las cotas inferiores

Orden producto en A



Empezamos dibujando el diagrama de Hasse de (A, Prod)

Empecemos buscando minimales y maximales, que SÓLO debemos buscar dentro de A.

Elementos maximales: (12,2) y (12,5) porque no hay ningún elemento de A posterior a ellos. Además estos elementos son incomparables en el orden producto porque lo son 2 y 5 en $(D_{10}, |)$

Como hay más de un maximal NO existe máximo

Elementos minimales: {(4,1), (6,1)}, porque no hay ningún elemento de A anterior en el orden producto a ninguno de ellos

Como hay más de un minimal NO existe mínimo.

Ahora buscamos cotas superiores e inferiores de A. Hay que mirar en todo $(D_{36}, |) \times (D_{10},|)$

Cotas superiores de A:

(a,b) será cota superior si a es múltiplo de 4, 6 y 12 y b es múltiplo de 1, 2 y 5. Luego las cotas superiores son {(12,10), (36,10)}

Como (12,10) es anterior a (36,10), (12,10) es el supremo de A

Cotas inferiores de A: {(1,1), (2,1)}

Ínfimo de A es (2,1) porque es mayor que (1,1)

3. **(1 punto)**
Demuestra por inducción que $3^{2n+5} + 2^{4n+1}$ es múltiplo de 7 para todo $n \geq 0$

SOL.:

Sigamos los pasos de una demostración por inducción:

Primer paso. Comprobamos que el resultado es cierto para $n=0$
$3^5 + 2^1 = 245 = 7 \cdot 35$, que efectivamente es un múltiplo de 7

Segundo paso. Suponiendo que el resultado es cierto para k, debemos probar que el resultado es cierto para $k + 1$

La hipótesis de inducción (HI) es que el resultado es cierto para k, es decir que
$3^{2k+5} + 2^{4k+1}$ es múltiplo de 7.
Debemos probar que $3^{2(k+1)+5} + 2^{4(k+1)+1}$ es múltiplo de 7. Operamos:

$$3^{2(k+1)+5} + 2^{4(k+1)+1} = 3^{2k+5} \cdot 3^2 + 2^{4k+1} \cdot 2^4 = 9 \cdot 3^{2k+5} + 16 \cdot 2^{4k+1} = 9 \cdot \underbrace{(3^{2k+5} + 2^{4k+1})}_{\text{Múltiplo de 7 por HI}} + \underbrace{7 \cdot 2^{4k+1}}_{\text{Múltiplo de 7}}$$

Por tanto, cada sumando es múltiplo de 7 y la expresión es múltiplo de 7 para $k + 1$

Así hemos conseguido demostrar que si el resultado es cierto para k, también lo es para $k + 1$.
Por el principio de inducción el resultado es cierto para todo $n \geq 0$

Observación.
Un error, más bien **disparate**, que aparece en la prueba de algunos alumnos es el siguiente:
En la expresión $3^{2k+5} \cdot 3^2 + 2^{4k+1} \cdot 2^4$ dicen que como $3^{2k+5} + 2^{4k+1}$ es múltiplo de 7 por HI, ya la expresión es múltiplo de 7, sin importar que un sumando aparezca multiplicado por 3^2 y el otro por 2^4

4. **(1 punto)**
Demuestra que si mcd(a,b) =1 entonces mcd (a+b, ab) = 1

SOL.:
Sea d divisor común de a+b y ab
Si $d | ab$, como mcd(a,b)=1 resulta que a y b no tienen ningún factor primo común, luego d será un divisor de a ó de b, pero sólo de uno de ellos. Trabajemos las dos opciones:
Si $d|a$ como $d|a+b$, resulta que $d|b$, luego $d = 1$
Y si $d|b$, como $d|a+b$ resulta también que $d|a$ y, en consecuencia $d=1$.
Luego 1 es el único divisor común de a+b y ab. Por tanto, mcd (a+b, ab) = 1

5. **(1 punto)**
El teatro infantil de marionetas tiene un aforo inferior a 90 personas. La entrada infantil cuesta un euro y la de adultos 3,10 euros. En la función vespertina se han recaudado 120,30 euros y han asistido más niños que adultos. ¿Cuántos niños acudieron a la función?

SOL.:
Sean **x** el número de niños que acudieron a la función e **y** el número de adultos. Indiquemos las relaciones entre las incógnitas que se deducen del enunciado.

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $x > y$
$x + y \leq 90$
$x + 3{,}10\, y = 120{,}30$

La tercera expresión se multiplica por 10 para conseguir una ecuación diofántica (coeficientes enteros)

$$10x + 31y = 1203 \qquad (*)$$

Resolvamos esta ecuación diofántica, que tiene solución porque $\text{mcd}(10,31) = 1$ que divide a 1203
En primer lugar resolvemos la ecuación $10x + 31y = 1$

La solución es inmediata, $x = -3$, $y = 1$
Por tanto, una solución particular de (*) es $x = -3 \cdot 1203 = -3609$, $y = 1203$
Y todas las soluciones de (*) son:

$$\begin{cases} x = -3609 + 31t \\ y = 1203 - 10t \end{cases} \quad \forall t \in Z$$

Falta ahora imponer las restricciones sobre x e y para determinar el valor (o valores) de t que responden a la pregunta del enunciado.

$x + y = 21t - 2406 \leq 90$, luego $21t \leq 2496$, es decir, $t \leq 118$
$x = -3609 + 31t \geq 0$, luego $31t \geq 3609$, es decir, $t > 116$

Para $t = 118$ tenemos $x = 49$, $y = 23$ solución válida
Para $t = 117$ tenemos $x = 18$, $y = 33$ que no es válida porque debe haber más niños que adultos.

Por tanto, el número de niños que acudieron a la función fue 49.

6. **(1,5 puntos)**

Pregunta de teoría está en las transparencias del tema 2.

7. **(1 punto)**
Halla los inversos, si existen, de 33 y 67 en Z_{702}

Recordemos que un elemento a es inversible en Z_m si y sólo si $\text{mcd}(a,m) = 1$

Inverso de 33
Como 33 y 702 son ambos múltiplos de 3 resulta que $\text{mcd}(33, 702) \neq 1$, por tanto 33 NO tiene inverso en Z_{702}

Inverso de 67
Como 67 es primo y no es divisor de 702 tenemos que $\text{mcd}(67, 702) = 1$ y, por tanto, 67 SÍ tiene inverso en Z_{702}

Lo calculamos encontrando x, y tales que $67x + 702y = 1$ con el algoritmo de Euclides.

$702 = 67 \cdot 10 + 32$
$67 = 32 \cdot 2 + 3$
$32 = 3 \cdot 10 + 2$
$3 = 2 \cdot 1 + 1$

Despejando 1 de abajo a arriba en las expresiones anteriores:
$\mathbf{1} = 3 - 2 = 3 - (32 - 3\cdot 10) = 11\cdot 3 - 32 =$
$= 11 \cdot (67 - 32\cdot 2) - 32 = 11\cdot 67 - 23\cdot 32 =$
$= 11 \cdot 67 - 23\cdot(702 - 67\cdot 10) = \mathbf{241}\cdot 67 \mathbf{- 23}\cdot 702$

Por tanto, **241**$\cdot$67 + **(–23)$\cdot$**702 = 1, o bien, 241$\cdot$67 $\equiv$ 1 (mod 702)

El inverso de 67 en Z_{702} es 241

8. **(1,5 puntos)**
 Resuelve la ecuación $207^{2015}\ x \equiv 27 \pmod{66}$

Las congruencias son una herramienta para manejar números grandes. Apliquémosla:

Empezamos por 207 (mod 66). Como 207 = 66$\cdot$3 + 9, 207 $\equiv$ 9 (mod 66)
Así simplificamos la ecuación original a

$9^{2015}\ x \equiv 27 \pmod{66}$

Aplicamos ahora la propiedad cancelativa en congruencias

Si $ac \equiv bc \pmod{m}$ entonces $a \equiv b \left(\mathrm{mod}\ \dfrac{m}{mcd(c,m)}\right)$

En nuestro caso c = 9, m = 66, mcd(9, 66) = 3, luego la ecuación se simplifica a

$9^{2014}\ x \equiv 3 \pmod{22}$

En este punto recordamos el teorema de Euler: $\boxed{\text{Si mcd(a,m) = 1 entonces } a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}}$

Y lo aplicamos para m = 22, a = 9, $\Phi(22) = \Phi(2)\ \Phi(11) = 10$ resultando que $9^{10} \equiv 1 \pmod{22}$
2014 = 10$\cdot$201 + 4, luego $9^{2014} = (9^{10})^{201} \cdot 9^4 \equiv 1 \cdot 9^4 \pmod{22}$

La ecuación original ha quedado reducida a $9^4\ x \equiv 3 \pmod{22}$
Y cancelando el factor 3, por la propiedad cancelativa, $3^7\ x \equiv 1 \pmod{22}$

$3^7 = 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3 = 5\cdot 5\cdot 3 \pmod{22} = 9 \pmod{22}$
La ecuación queda, por tanto, así: $9\ x \equiv 1 \pmod{22}$

Que tiene una única solución $\boxed{x \equiv 5 \pmod{22}}$

Observación

$9^{2015}\ x \equiv 27 \pmod{66}$

¡NO se puede aplicar el teorema de Euler antes de aplicar la propiedad cancelativa!

Porque para a = 9, m = 66, se tiene que mcd(9, 66) = 3 $\neq$ 1 y en este caso no se cumple la hipótesis del teorema de Euler.

Y tampoco se puede realizar la siguiente simplificación disparatada:

$9^{2015}\ x \equiv 27 \pmod{66}$ simplificamos por 3 y se obtiene $3^{2015}\ x \equiv 9 \pmod{22}$,

porque ¡algunos alumnos se olvidan del exponente 2015!